FТАХР 27.21.17

М.А. Есмағамбетов[1], *М.М. Кусаинова*[2]
[1]Сәкен Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан
[2]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

ЭЛЛИПС ДОҒАСЫНЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫ

Аңдатпа. Бұл мақала негізінде эллипс тектес мүсіндердің доғаларының ұзындықтарын анықтаушы интегралдарын зерттеп, олардың шешілу жолдарын жетілдіріп, нақтылы шешімін жеңіл жолмен беретін формуласын қорытып шығару жолдары қарастырылады. Эллипс мүснінің бейнесі бізге атам заманынан әріден белгілі болса - да, бізде осы күнге дейін оның доғасының ұзындығын бізге дұрыс жолмен беретін, оның сандық ұзындығының мөлшерін табуға арналған формуласының болмауы себепті, оның доғасының суреттегі ұзындығын әртүлі әдіс-тәсілдермен шешіп: атап айтқанда, оның доғасын тікбұрыш, немесе трапеция бөлшектеріне бөліп, одан шыққан сандардың жиынтығын, алдын-ала қате сандар екенін біле тұрсақ-та, оларды есебіміздің нақтылы жауабына жуық сандар негізінде қабылдап келеміз. Сол себепті бұндай ойқылықтарды алдағы уақыттарда қайталамау үшін, төмендегі шешімдерді қарастырып отырмыз.

Түйін сөздер: эллипс, тікбұрыш, трапеция, интеграл, эллиптикалық мүсіндер, доға.

***

Abstract. In this article there are ways of studying the integrals that determine the lengths of the arcs of elliptical sculptures, improving the ways to solve them and generalizing the formula that gives an accurate solution in an easy way. The image of the sculpture of an ellipse has been known to us since ancient times, and to this day we do not have a formula for finding the value of its numerical length, which gives us the length of its arc in the correct way, determining the length of its arc in the figure in various ways: in particular, breaking its arc into parts of a rectangle, or trapezoid, knowing that the sets of numbers coming from it are incorrect numbers in advance, we accept them on the basis of numbers close to the actual answer of our calculation. Therefore, in order not to repeat such failures in the future, we consider the following solutions.

Keywords: ellipse, rectangle, trapezoid, integral, elliptic sculptures, arc.

***

Аннотация. В этой статье рассматриваются пути изучения интегралов, определяющих длины дуг эллиптических скульптур, совершенствования способов их решения и обобщения формулы, дающей точное решение легким путем. Изображение скульптуры эллипса известно нам еще с далеких времен, и по сей день у нас нет формулы для нахождения величины его числовой длины, дающей нам длину его дуги правильным путем, определяя длину его дуги на рисунке различными способами: в частности, разбивая его дугу на части прямоугольника, или трапеции, зная, что исходящие из него множества чисел, являются заранее неверными числами, мы принимаем их на основе приближенных к фактическому ответу нашего расчета чисел. Поэтому, чтобы в дальнейшем не повторять подобных ошибок, мы рассматриваем следующие решения.

Ключевые слова: эллипс, прямоугольник, трапеция, интеграл, эллиптические фигуры, дуга.

Кіріспе

Мақаланың бұл бөлімінде іс жүзінде эллипс тектес мүсіндердің доға ұзындықтарының интегралдары зерттеліп, оның негізінде сол интегралдардың шешілу жолдарын анықтаушы формулалары құрастырылады.

Эллипс тектес мүсінінің доға ұзындығының жалпы интегралын $\int_0^{½\pi} \sqrt{a^2 Cos^2 x + b^2 Sin^2 x}\ dx$ (1) алып, оның доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұл тапсырманы орындау үшін, алдымен берілген интегралымызды зерттеп алып, әріқарай зерттеу негізінде оның шешілу жолдары іздестіріледі [1].

Негізгі бөлім

Шешімін табуға тапсырылған интегралымызды зерттейтін болсақ, бұндағы түбір астындағы мүшелерінің әртүрлі өлшемде, яғни жартылай өстері « a^2 » пен « b^2» ұзындық өлшемінде, ал Cos^2x пен Sin^2x – тің бұрыштық өлшемінде болулары себепті, бұндай интегралдарды шешу үшін, ондағы оның мүшелерінің бір өлшемде болуларының керектігін ескере келе, бұндағы түбір астындағы Cos^2x пен Sin^2x – тің бұрыштық өлшемінен оның атаусыз (натуральды) өлшемдеріне көшу жолдары деп мына « $Cos^2x_{,,}$» , « $Sin^2x_{,,}$» таңбаларды алып , оларды төмендегі теңдеулерге тең болады деп:

$$Cos^2x_{,,} = \frac{\left[k\,(a+b)^2 - a\cdot b\right]^2 - 4\,(a+b)^2\cdot b^2}{4\,(a+b)^3(a-b)} \quad (2),$$

$$Sin^2x_{,,} = \frac{4\,(a+b)^2\cdot a^2 - \left[k\,(a+b)^2 - a\cdot b\right]^2}{4\,(a+b)^3(a-b)} \quad (3),$$

бұндағы «k» коэффициентін келесі формуладан тауып алып, $k = 1{,}25 + \frac{4-1{,}25\,\pi}{\pi} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6$ (4) (бұнда $\boldsymbol{\pi} = 3{,}1416$ десек, одан $\frac{4-1{,}25\,\pi}{\pi} = 0{,}023236567$ болады деп) қорытындысында $Cos^2x_{,,}$ пен $Sin^2x_{,,}$ – тің натуральды сандық мәндерінінің мөлшерлерін (1) формуласына апарып қойып, одан бір өлшемді (1*) формуласын алып, тапсырмамызды орындап шығамыз. Ол $\int_0^{½\pi} \sqrt{a^2Cos^2x + b^2Sin^2x}\,dx = \sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}\int_0^{½\pi} dx$ болады деп, оны эллипс тектес мүсін доғасының мүшелері анықталған ұзындығының интегалының жалпы формуласы деп, одан әріқарай $\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}\int_0^{½\pi} dx = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}$ (1*) табамыз. Олай болса, енді осы $½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}$ (1*) формула негізінде бірнеше мысалы есептер шешіп көрейік [1]. Мысалы:

1. a = 1; b = 1; болғандағы бейненің доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұл тапсырманы орындау үшін алдымен «К» коэффициентін (4) бойынша тауып алып, ол $K = 1{,}25 + 0{,}023236567 \cdot \left(\frac{1-1}{1+1}\right)^6 = 1{,}25$-ке тең болады деп, әрі қарай (2) және (3) формулалары бойынша:

$$Cos^2x_{,,} = \frac{\left[1{,}25\,(1+1)^2 - 1^2\right]^2 - 4\,(1+1)^2 \cdot 1^2}{4\,(1+1)^3\,(1-1)} = \frac{16-16}{32 \cdot (1-1)} = \frac{16}{32} \cdot \frac{(1-1)}{(1-1)} = 0{,}5$$

$$Sin^2x_{,,} = \frac{4\,(1+1)^2 \cdot 1^2 - \left[1{,}25\,(1+1)^2 - 1^2\right]^2}{4\,(1+1)^3\,(1-1)} = \frac{16-16}{32 \cdot (1-1)} = \frac{16\,(1-1)}{32\,(1-1)} = 0{,}5$$

деп, (1*) формуласы бойынша ол $½\boldsymbol{\pi}\sqrt{1^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5} = ½\boldsymbol{\pi}$ а–ға тең болады десек, одан щеңбер доғасының ширек ұзындығын аламыз.

2. a = 1; b = 0,5; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұндағы $K = 1{,}25 + 0{,}023236567 \cdot \left(\frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}\right)^6 = 1{,}250031874$ болып шығады. Ал бұнда (2) және (3) формулалары бойынша

$$Cos^2x_{,,} = \frac{\left[1{,}250031874\,(1+0{,}5)^2 - 1 \cdot 0{,}5\right]^2 - 4\,(1+0{,}5)^2 \cdot 0{,}5^2}{4\,(1+0{,}5)^3\,(1-0{,}5)} = 0{,}458961176$$

$$Sin^2x_{,,} = \frac{4\,(1+0{,}5)^2 \cdot 1^2 - \left[1{,}250031874\,(1+0{,}5)^2 - 1 \cdot 0{,}5\right]^2}{4\,(1+0{,}5)^3\,(1-0{,}5)} = 0{,}541038822$$

болады.

Ал $½\pi\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}$ (1*) формуласынан оның келесі сандық мөлшерін аламыз.

Ол $½\boldsymbol{\pi}\sqrt{1^2 \cdot 0{,}458961176 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}541038822} = 1{,}210862547a$ – ға тең болып, бұл жартылай өстері a = 1; b = 0,5- ке тең болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады.

3. a = 1; b = 0; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұнда К = 1,25 + 0,023236567· ($\frac{1-0}{1+0}$)^6 = 1,273236567 болып шығып, ал

$$Cos^2x_{,,} = \frac{\left[1{,}273236567\,(1+0)^2\right]^2 - 4\,(1+0)^2\cdot 0^2}{4\,(1+0)^3\,(1-0)} = 0{,}405282838$$

$$Sin^2x_{,,} = \frac{4\,(1+0)^2\cdot 1^2 - \left[1{,}273236567\,(1+0)^2 - 1\cdot 0\right]^2}{4\,(1+0)^3(1-0)} = 0{,}594717161$$

болады. ½$\boldsymbol{\pi}\sqrt{1^2\cdot 0{,}405282838 + 0^2\cdot 0{,}594717161}$ = 1а–ға тең болып, бұл эллипстің түзу сызыққа дейін сығымдалған бейнесінің ширек ұзындығы болады.

Енді эллипс тектес бейне доғасының ұзындығының анықталған жалпылама формуласын алып, оны $\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}\ \int_0^{½\pi} dx$ әріқарай зерттейтін болсақ, онда нақтылы жауабы оның жалпы интегралының жауабына тең ықшамдалған екі бөлшекке бөлінетіндігін байқауға болады. Олар: төмендегі (5_1) және (5_2) бөлшектері.

$$\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}\int_0^{½\pi} dx = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\,Sin^2x_{„}} \quad (5_1)$$

Енді ½$\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\,Sin^2x_{„}}$ (5_1) бөлшегін негізге ала отырып, шешімін табуға алынған формуламыздың жауаптарын тексеру үшін, жоғарыдағы шешілген мысалы есептерді қайталай шешіп көрейік.

4. a = 1; b = 1; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда бұл тапсырманың жартылай өстері 1-ші есептің жартылай өстеріне тең болғандықтан бұндада К = 1,25 болып, ал $Sin^2x_{,,}$=0,5 болады. Олай болса (5_1) бойынша ½$\boldsymbol{\pi}\sqrt{1^2-(1^2-1^2)\cdot 0{,}5}$ = ½$\boldsymbol{\pi}$ a болып шығады. (Оны 1 - есептің жауабымен салыстыр)

5 . a = 1; b = 0,5; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда 2 - ші есеп бойынша К = 1,250031874 болып, ал $Sin^2x_{,,}$ = 0,541038822 болғанды. Олай болса (5_1) бойынша ½$\boldsymbol{\pi}\sqrt{1^2-(1^2-0{,}5^2)\cdot 0{,}541038822}$ = 1,210862551a болып шығып, ол жартылай өстері a=1; b=0,5 болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады. (2 - ші есептің жауабын қара.)

6. a = 1 ; b = 0 ; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда 3- ші есеп бойынша К=1,273236567 болып, ал $Sin^2x_{,,}$=0,594717161 шыққанды. Одан (5_1) бойынша ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{1^2-(1^2-0^2)\cdot 0{,}594717161}$ =1a болып шығады. Бұл эллипс доғасының түзу сызыққа дейін сығымдалған доғасының ширек ұзындығы болады. (3 - ші есептің жауабын қара) Әріқарай $\sqrt{a^2Cos^2x_{„} + b^2Sin^2x_{„}}\int_0^{½\pi} dx = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\,Cos^2x_{„}}$ (5_2) деп,

енді ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)Cos^2x_{,,}}$ (5_2) бөлшегі негізінде, өзімізді тексеру үшін, жоғарыдағы есептерді және шешіп көрейік.

7. a =1; b =1; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда 1- есеп бойынша К=1,25 болып, $Cos^2x'' = 0,5$ болғанды. Онда олай болса (5_2) бойынша ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{1^2 + (1^2 - 1^2)\,0,5}$ = ½$\boldsymbol{\pi}$ a болып, шеңбер доғасының ширек ұзындығын береді. (1 - ші және 4-ші есептердің жауаптарын қара).

8. a = 1; b = 0,5; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда 2 - есеп бойынша К=1,250031874 болып, ал $Cos^2x_{,,}$ = 0,458961176 болғанды. Олай болса онда (5_2) бойынша: ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{0,5^2 + (1^2 - 0,5^2) \cdot 0,458961176}$ =1,210862549a болып, ол a = 1; b = 0,5 болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады. (Оны 2, 5-есептердің жауаптарымен салыстыр.)

9. a=1; b=0; болғандағы бейненің ұзындығын табу керек дейік. Бұнда 3-есеп бойынша К = 1,273236567 болып, ал $Cos^2x_{,,}$ = 0,405282838 болады.

Олай болса (5_2) бойынша ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{0^2 + (1^2 - 0^2) \cdot 0,405282838}$ = 1a болып, ол эллипс доғасының түзу сызыққа дейін сығымдалған бейнесінің ширек ұзындығы болады. (Оны 3, 6-есептердің жауаптарымен салыстыр).

Бұдан (5_1) мен (5_2) бөлшектерінің жауаптарының барлық мүшелері анықталған эллипс тектес бейнелердің ұзындықтарының жалпылама интегралдарының жауаптарына тең сандар бергендігін көреміз. Солай болатұрсада бұл шешімдер бізді қанағаттандыра алмайды, себебі берілген тапсырманы жоғарыдағы бөлшектер негізінде орындап шығу үшін , бізге көптеген есептеу жұмыстарын орындап шығу керек, сол себепті бізді жоғарыдағы эллипс тектес мүсіндердің доғаларының ұзындықтарының формулаларының шешілу жолдарын жеңіл тәсілмен шешуге болатындай амалдарды іздестіруге жетелейді. Ол үшін, (5_1) және (5_2) шешілу жолдарын жеңілдетіп көрейік; Алдымен ½$\boldsymbol{\pi}$ $\sqrt{a^2 - \,(a^2 - b^2)\,Sin^2x_{,,}}$ (5_1) – ді алайық.

Бұнда $Sin^2x_{,,}$ –тің орнына оның (3) формуладағы натуральды өлшемдерін апарып қойсақ, онда төменгі формулалардың жалғасын аламыз [2].

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)Sin^2x_{„}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-\frac{(a^2-b^2)\{4(a+b)^2a^2-\{k(a+b)^2-ab]^2\}}{4(a+b)^3(a-b)}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-\frac{(a^2-b^2)\{4(a+b)^2a^2-[k(a+b)^2-ab]^2\}}{4(a+b)^3(a-b)}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-\frac{4(a+b)^2a^2-[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{a^2-\frac{4(a+b)^2a^2-[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{4(a+b)^2a^2-4(a+b)^2a^2+[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{4(a+b)^2a^2-4(a+b)^2a^2+[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}}$$

$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}} = \frac{\pi[k(a+b)^2-ab]}{4(a+b)}$ (6) болып, бұл эллипс тектес бейнесінің интегралының ширек ұзындығының жеңілдетілген формуласы болады .

Енді $½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)Cos^2x_{„}}$ (5_2) – нің шешімін жеңілдетіп көрейік.

Бұнда $Cos^2x_{„}$ –тің орнына (2) –ші формуладағы оның натуральды өлшемін қойып, төмендегі формулалардың жалғасын аламыз.

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)Cos^2x_{„}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+\frac{(a^2-b^2)[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^3(a-b)}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+\frac{(a^2-b^2)[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^3(a-b)}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+\frac{[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^2}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{b^2+\frac{[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^2}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{4(a+b)^2b^2+[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^2}}$$

$$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{4(a+b)^2b^2+[k(a+b)^2-ab]^2-4(a+b)^2b^2}{4(a+b)^2}} = ½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}}$$

$½\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{[k(a+b)^2-ab]^2}{4(a+b)^2}} = \frac{\pi[k(a+b)^2-ab]}{4(a+b)}$ (6) болып, бұлда эллипс тектес бейнелердің интегралдарының ширек ұзындығының жеңілдетілген формуласы болып табылады. (Бұндағы К-коэффициентін жоғарыдағы 4–ші формуласы бойынша табамыз).

Бұл (6) - формула жоғарыдағы барлық формулалардың ішіндегі шешуі жеңіл ең қысқа формула болып табылады. Берілген тапсырманы бұл формула бойынша орындап шығу үшін , шешімін табуға жүктелген тапсырманың теққана жартылай өстері белгілі болса жеткілікті болады. Оны келесі мысалы есептерді шешу негізінде дәлелдеп көрейік:

10. a =1; b =1; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұнда жоғарыдағы мысапы есептерді шешкенде жартылай өстері осы тапсырмадағыдай болғанда К = 1,25 –ке тең болғанды. Олай болса (6) формуласы бойынша $\frac{\pi\,[\,1{,}25\,(\,1+1\,)^2-1^2]}{4\,(\,1+1\,)}$ = 1,5708a болып, ол шеңбер доғасының ширек ұзындығы болады. (1,4,7 – есептердің жауаптарын қара).

11. a = 1; b = 0,75; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік.

Бұнда К = 1,25 + 0,023236567 ($\frac{1-0{,}75}{1+0{,}75}$)^6 = 1,250000197 болады. Одан $\frac{\pi\,[\,1{,}250000197\,(\,1+0{,}75\,)^2-1\cdot 0{,}75\,]}{4\,(\,1+0{,}75\,)}$ = 1,381462767 a -ға тең болып, ол жартылай өстері a = 1; b = 0,75; болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады.

12. a = 1; b = 0,5; болғандағы бейне доғасының ширек ұзындығын табу керек дейік. Бұнда алдыңғы шешілген есептерде К = 1,250031874 болғанды. Олай болса, $\frac{\pi\,[\,1{,}250031874\,(\,1+0{,}5\,)^2-1\cdot 0{,}5\,]}{4\,(\,1+0{,}5\,)}$ = 1,21086255a болады. Бұл жартылай өстері a = 1; b = 0,5; тең эллипс доғасының ширек ұзындығы болады (оны 2, 5, 8 –есептердің жауаптарымен салыстыр).

13. a = 1; b = 0,25; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұнда К = 1,25 + 0,023236567 ($\frac{1-0{,}25}{1+0{,}25}$)^6 = 1,251084125 болады. Олай болса, $\frac{\pi\,[\,1{,}251084125\,(\,1+0{,}25\,)^2-1\cdot 0{,}25\,]}{4\,(\,1+0{,}25\,)}$ = 1,071171839 a болып, ол жартылай өстері a = 1; b = 0,25; болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады.

14. a = 1; b = 0; болғандағы бейне доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұнда алдыңғы есептерді шешкенде, жартылай өстері біздің тапсырмамыздың өстеріне тең болғанда К = 1,273236567 болып шыққанды. Олай болса, $\frac{\pi[\,1273236567\,(\,1+0\,)^2-1\cdot 0\,]}{4\,(\,1+0\,)}$ = 1a болып, ол түзу сызыққа дейін сығымдалған эллипстің ширек ұзындығы болады.

15. Канондық формуласы $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ болғандағы эллипс доғасының ұзындығын табу керек дейік. Бұл есепті бірнеше тәсіл – әдіс жолдарымен шешуге болады.

1 – әдіс.

Доғасының ұзындығын табуға тапсырылған формуладан эллипстің жартылай өстерін ажыратып алу әдісі бойынша шешу. Оны төмендегі есептің шешімінен қара. Бұнда берілген тапсырманың Канондық формуласы жоғарғыдай болғанда, оның жартылай өстері $a = \sqrt{25} = 5$ – ке; ал $b = \sqrt{9} = 3$ – ке; тең болады. Олай болса, бұндағы $K = 1{,}25 + 0{,}023236567 \cdot (\frac{5-3}{5+3})^6 = 1250005672$ болады. Одан (6) бойынша: $\frac{\pi\,[\,1{,}250005672\,(\,5+3\,)^2 - 5\cdot 3\,]}{4\,(\,5+3\,)} = 6{,}381410637$ бірлікке тең болып, ол жартылай өстері $a = 5$; $b = 3$; болғандағы эллипс доғасының ширек ұзындығы болады.

2 – әдіс.

Эллипс доғасының бірінші квадрантта жатқан координаталары $x = 5 \operatorname{Sin} t$, $y = 3 \operatorname{Cos} t$, $0 \le t \le ½\pi$ десек, онда оның доғасының ұзындығы, оның координаталарының туындысының квадраттарының қосындысының түбіріне тең сандардың интегралына тең деп, оны: $\int_0^{½\pi} \sqrt{(\,x')^2 + (\,y')^2}\ dt = \int_0^{½\pi} \sqrt{25 \operatorname{Cos}^2 t + 9 \operatorname{Sin}^2 t}\ dt$ болады десек, онда бұндағы түбір астындағы $\operatorname{Cos}^2 t$ мен $\operatorname{Sin}^2 t$ - нің орындарына олардың анықталған 2 және 3 формулаларындағы таңбаларының мәндерін қойып белгілі $½\pi'\sqrt{25 \operatorname{Cos}^2 t_{,,} + 9 \operatorname{Sin}^2 t_{,,}}$ (1*) формуласын аламыз. Бұнда (2) және (3) –формулалары негізінен :

$\operatorname{Cos}^2 t_{,,} = \frac{[\,k\,(\,a+b\,)^2 - a\cdot b\,]^2 - 4\,(\,a+b\,)^2 \cdot b^2}{4\,(\,a+b\,)^3\,(\,a-b\,)} = \frac{\left[\,1{,}250005672(\,5+3\,)^2 - 5\cdot 3\,\right]^2 - 4(5+3)^2 3^2}{4(5+3)^3(5-3)} =$ 0,469005661,

$\operatorname{Sin}^2 t_{,,} = \frac{4(a+b\,)^2 \cdot a^2 - [k(a+b)^2 - ab\,]^2}{4(a+b\,)^3(a-b)} = \frac{4(5+3)^2 \cdot 5^2 - [1{,}250005672(5+3)^2 - 5\cdot 3]^2}{4(5+3)^3(5-3)} =$ 0,530994338

деп, одан $½\pi\sqrt{25 \cdot 0{,}469005661 + 9 \cdot 0{,}530994338} = 6{,}381410632$ болып, ол алынған эллипс доғасының ширек ұзындығы болады. (оны 1-әдістің жауабымен салыстыр).

3 – әдіс

Жоғарыдағы (5_1) формуласы жолдарымен шешу. Ол $½\pi\sqrt{a^2 - (\,a^2 - b^2)\operatorname{Sin}^2 t_{,,}}$. Бұндағы $\operatorname{Sin}^2 t_{,,} = 0{,}530994338$ болғанда, $½\pi\sqrt{25 - (\,25 - 9\,)\,0{,}530994338} = 6{,}381410639$ тең болып, ол алынған эллипс доғасының ширен ұзындығы болады. (1, 2 – әдістердің жауаптарын қара).

4 – әдіс

Жоғарыдағы (5_2) формуласы негіздерінде шешу жолдары. Ол $½\pi\sqrt{b^2 + (\,a^2 - b^2)\operatorname{Cos}^2 t_{,,}}$. Бұндағы $\operatorname{Cos}^2 t_{,,} = 0{,}469005661$ болғанда, $½\pi\sqrt{9 + (\,25 - 9\,)\,0{,}469005661} = 6{,}381410633$ болып, алынған эллипс доғасының ширек ұзындығын береді. Канондық формуласы арқалы берілген эллипстің ұзындығын табу тапсырмасын жоғарыдағы төрт әдіс тәсілдермен шешкенде, барлық әдістердің жауаптарының бірдей болғандығын және барлық әдістердің ішіндегі шешімі жеңіл, шешілу жолы қысқа (6) формуласы болғандығын көреміз [2].

Қорытынды бөлім

Бұл мақала негізінен үш бөлімнен тұрады. Мақаланың кіріспе бөлімінде ой зерттеулері негізінде қорытынды тұжырымдамалар жасалған болса, ал оның негізгі бөлімінде сол тұжырымдамаларды іс жүзінде, белгілі формулаларды икемі мол, шешімі жеңіл, жекеменшік белгісімен қорғалып, жаңа формулалар түрлеріне келтірілген жолдары дәлелденіп, қорытындысында олардың шешілу кілті анықталады. Бұндағы қолданылған формулалардың барлығының шешілу кілті «К» коэффициенті болып табылады. К–коэффициенті эллипс тектес мүсіндерінің берілген формулаларын икемі мол түрлеріне келтіріп, алға қойылған тапсырманы орындап шығудың негізі болып табылады. Бұл мақаланың (4)–ші формуласындағы 1,25 пен 0,023236567 сандарының қайдан шыққан сандар екенін зерттейтін болсақ, онда көз алдымызға мына мүсіндердің тізбегін елестетіп көрейік: Бірінші, радиусы а–ға тең шеңберді, оның қатарында сол шеңбердің сығымдалуынан пайда болған эллипсті, соңында эллипстің түзу сызыққа дейін сығымдалған мүсіндерінің қатарын алып, олардың әрқайссын жеке – жеке зерттейтін болсақ, онда ешқандай дау-дамайсыз шеңбер доғасының жалпы үзындығын $L = 2\pi a$ деп жазуға болады.

Ал шеңбер ұзындығының бұл формуласын 2π- ге бөлсек, онда оның ұзындығын анықтаушы «а» санын аламыз. Егер енді осы санды мына формулаға апарып қойсақ $K=\frac{2(a+a)a+a^2}{(a+a)^2}=\frac{5a^2}{4a^2}=1{,}25$ - ке тең болып шығып, ол шеңбер доғасының коэффициенті болып табылады.

Ал эллипс доғасының жалпы ұзындығы әзірше бізге белгісіз болуы себепті, оның К–коэффициентін, шеңбер доғасының коэффициентін табуға арналған әдіс негізін пайдалана алмауымыздықтан, оны уақытша белгісіз сан түрінде қалдыратұруға тура келеді.

Ал эллипстің түзу сызыққа дейін сығымдалуынан пайда болған мүсінінің жалпы ұзындығы $L=4a$–ға тең болады. Енді осы мүсіннің жалпы ұзындығын 2π-ге бөлсек, онда оның ұзындығын анықтаушы саны 0,636618283а –ға тең болады. Егер осы санды мына формулаға апарып қойсақ, одан $K=\frac{2(a+b)\cdot 0{,}636618283a+ab}{(a+b)^2}=$

$\frac{2\,(a+0)\cdot 0{,}636618283a+a\cdot 0}{(a+0)^2}$ =1,273236566 шығып, ол біздің түзу сызығымыздың коэффициенті болса, онда эллипс доғасының коэффициентін $1{,}25 \le К \le 1{,}273236566$ деп жазатын болсақ, онда оны $К = 1{,}25 + \Delta \cdot (\frac{a-b}{a+b})^6$ деп жазуға болады. Бұндағы $\Delta = 1{,}273236566 - 1{,}25 = \frac{4-1{,}25\pi}{\pi} = 0{,}023236567$ –ге тең болады десек, онда қорытындысында (4) формуласындағы 1,25 пен 0,023236567 сандарының шығу жолдары көрсетілген болады [3].

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрий. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
2 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометии и линейной алгебры. – М.: Наука. 1985. – С. 77-79.
3 Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, Ряды. – М.: Наука, 1956. – С. 186-202.