МРНТИ 27.03.66

В.В. Вербовский[1]
[1]Университет имени С. Демиреля, Каскелен, Казахстан

О ЛОКАЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ ОДНОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛИМЫХ В КОНЕЧНО ПРОСТЕГАННЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Аннотация. Как было доказано Б. Кулпешовым, любое сечение в слабо о-минимальной структуре может иметь максимум два расширения до полных типов, причем множества всех реализаций этих типов являются выпуклыми в любых элементарных расширениях. В данной статье мы обобщаем понятие слабой о-минимальности и получаем следующее понятие *n*-стеганых структур: линейно упорядоченная структура называется *n*-стеганой, если любое сечение имеет не более *n* расширений до полного типов. Обратите внимание, что мы здесь опускаем условие, что множество всех реализаций типа должно быть выпуклым. В этой статье мы исследуем свойство локальной монотонности для одноместных функций, определимых в конечно простеганных структурах.

Ключевые слова: математическая логика, теория моделей, о-минимальность, упорядоченные структуры, сечение, полный тип.

***

Abstract. As it was proved by B. Kulpeshov, any cut in a weakly o-minimal structures can have at most two extensions up to complete types, and the sets of realizations of these types are convex in any elementary extensions. In this paper we consider a generalization of weak o-minimality, namely notion of an *n*-quilted structure: a totally ordered structure is said to be *n*-quilted if any cut has at most *n* extensions up to complete types over the structure. Note that we omit here condition that the set of all realizations of a type must be convex. In this article we investigate the property of local monotonicity for unary functions definable in finitely quilted ordered structures.

Key words: mathematical logic, model theory, o-minimality, ordered structures, a cut, a complete type.

***

Аңдатпа. Б. Күлпешов дәлелдегендей, әлсіз минималды құрылымдағы кез-келген қима толық типке дейін ең көбі екі кеңейтімге ие бола алады, ал осы типтердің барлық іске асырылу жиынтығы кез-келген қарапайым кеңейтулерде дөңес болады. Бұл мақалада әлсіз минимализм ұғымын қорытып, n-қабулы құрылымдар туралы келесі ұғымды аламыз: сызықты реттелген құрылым, егер қандай да бір қимада толық типтерге кеңейтілген n болса, n-қабулы деп аталады. Мұнда типтің барлық іске асыруларының жиынтығы дөңес болуы керек деген шартты ескермейміз. Бұл мақалада біз біртектес функциялар үшін жергілікті монотондылық қасиетін ақырғы қабулар құрылымында анықтауға болатындығын қарастырамыз.

Түйін сөздер: математикалық логика, модельдер теориясы, о-минимум, реттелген құрылымдар, қима, толық тип.

Пусть $M = (M, <, \dots)$ будет линейно упорядоченной структурой. *Открытый интервал* I в структуре M есть параметрически определимое подмножество структуры M вида $I = \{c \in M : M \vDash a < c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$, где $a < b$. Аналогично, мы можем определить *замкнутые, полуоткрытые-полузамкнутые* и тому подобные интервалы в M, так что, например, произвольная точка структуры M является сама (тривиальным) замкнутым интервалом. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Выпуклым компонентом множества A назовем максимальное выпуклое подмножество множества A. Выпуклым замыкание множества A является наименьшее выпуклое множество, содержащее множество A. Будем обозначать его A^c. Запись $A < B$ означает, что каждый элемент из A меньше всякого элемента из B.

Одно из основных понятий в теории моделей — понятие о-минимальной структуры — было введено А. Пиллаем и Ч. Стайнхорном [1]. Слабая о-минимальность — его обобщение, введенное в [2]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M.

Для двух подмножеств A и B множества M будем писать $A < B$, если $a < b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$. будем говорить, что элемент a лежит между двумя множствами B и C, если либо $B < a < C$, либо $C < a < B$.

Пара подмножеств (C, D) линейно упорядоченной структуры M называется *сечением*, если $C \cup D = M$ и $C < D$. Скажем, что сечение (C, D) определимо, если множество C формульно. По сечению (C, D) можно построить частичный тип $s \in S_{\varphi}(M)$, где $\varphi(x; y, z) \stackrel{\text{def}}{=} y < x < z$, при помощи закона: $c < x < d \in s$ тогда и только тогда, когда $c \in C$ и $d \in D$. Легко понять, что и любой $<$-тип определяет сечение. Поэтому будем называть такие $<$-типы сечениями.

Заметим, что любое сечение в модели M слабо о-минимальной теории имеет самое больше два расширения до полных типов над M, причем реализации этих типов выпуклы [3]. Если $p \in S_1(M)$, то будет писать (C_p, D_p) для единственного сечения, которое совместно p, то есть для $<$-части типа p.

Определение 1. Линейно упорядоченная структура $(M, <, \dots)$ называется n-простеганной, если любое сечение в M имеет самое большее n пополнений до полных типов над M. Здесь, n — положительное целое число. Линейно упорядоченная структура $(M, <, \dots)$ называется конечно-простеганной, если любое сечение в M имеет конечное число пополнений до полных типов над M.

Элементарная теория называется n-простеганной (конечно-простеганной), если любая ее модель такова.

Из работы [3] следует, что слабо о-минимальные теории являются 2-простеганными. Некоторые свойства конечно-простеганных теорий были рассмотрены в работе [4].

Вспомним такое понятие из топологии, как росток множеств, переложенное для топологии, индуцированной линейным порядком. Пусть в упорядоченной структуре дано сечение $s = \langle C, D \rangle$. Для заданного сечения определим росток множеств следующим образом. Два множеств A и B лежат в одном и том же ростке, если существуют такие элементы $c \in C$ и $d \in D$, что $(c, d) \cap A = (c, d) \cap B$. Если $D = \emptyset$, то A и B лежат в одном и том же ростке, если существует такой элемент $c \in C$, что $(c, \infty) \cap A = (c, \infty) \cap B$. Если $C = \emptyset$, то A и B лежат в одном и том же ростке, если существует такой элемент $d \in D$, что $(-\infty, d) \cap A = (-\infty, d) \cap B$. Очевидно, что данное отношение является отношением эквивалентности.

Вообще говоря, понятие ростка в топологии вводят для функций. Но так как можно рассмотреть вместо подмножеств их характеристические функции, то становится понятным, что понятие ростка можно и перенести на подмножества.

Определение 2. Будем называть функцию f *локально монотонной*, если для любого $a \in dom\, f$ существует бесконечное подмножество, содержащее элемент a, такое что сужение функции на данное подмножество является монотонным.

Определение 3. Предположим, что элементарная теория T линейно упорядоченной структуры $(M, <, \dots)$ является конечно-простеганной, а сама модель $(M, <, \dots)$ достаточно насыщенной. Теорию T назовем *почти гладкой*, если для любого интервала существует такой подынтервал I и такое конечное множество одноместных попарно несовместных формул $P_1, \dots, P_n$, что любой 1-тип над M определяется сечением и включением ровно одной из формул $P_1, \dots, P_n$.

Вопрос 1. Является ли каждая конечно-простеганная теория почти гладкой?

Теорема 1. Предположим, что элементарная теория линейно упорядоченной достаточно насыщенной структуры $(M, <, \dots)$ является почти гладкой конечно-простеганной, а f — ее формульной функцией. Пусть N будет достаточно насыщенным элементарным расширением структуры M. Тогда для любого сечения $s = \langle C, D \rangle$ и любого ростка A из этого сечения сужение функции f на множество $s(N) \cap A$ является локально монотонным.

Доказательство. Пусть элементарная теория линейно упорядоченной структуры $(M, <, \dots)$ будет конечно-простеганной, а f ее формульной функцией. Рассмотрим сечение $s = \langle C, D \rangle$. Легко понять, что множество всех формульных подмножеств заданной упорядоченной структуры разбивается на конечное число ростков относительно данного сечения. Пусть N будет достаточно насыщенным элементарным расширением структуры M. Возьмем некоторый росток A, заданный на сечении s и рассмотрим подмножество $B = s(N) \cap A$ структуры N. Очевидно, что, на самом деле, B является множеством всех реализаций в структуре N некоторого 1-типа над структурой M. Заметим, что это множество неформульное. Пусть $\alpha, \beta \in s(N)$. Можем заменит рассмотрение неформульного множества B на рассмотрение формульного множества $E = (\alpha, \beta) \cap B$. Его формульность можно нетрудно доказать.

Рассмотрим сужение функции f на E. Заметим, что если рассматривать определимые множества над M и множества вида $f(x) > f(\gamma)$, $f(x) = f(\gamma)$, $f(x) < f(\gamma)$, где $\gamma \in E$, то полученная структура будет слабо о-минимальной, в следующем смысле.

Рассмотрим формулу $f(x) > f(\gamma) \wedge x \in E$. Предположим, что множество всех ее реализаций состоит из бесконечного числа выпуклых компонент. Тогда существует сечение, которое совместно как с формулой $f(x) > f(\gamma) \wedge x \in E$, так и с ее отрицанием. Пусть интервал (a, b) в M

будет таким, что $a < E < b$. Тогда в силу того, что рассматриваемая теория почти гладкая можно понять, что существует подынтервал I в M, содержащий E, в котором все типы определяются сечением и попарно несовместными формулами $P_1, \ldots, P_n$. Но тогда мы получаем, что количество формул, определяющих типы в сечении, выросло. Но эта формула имеет параметры из элементарного расширения. Но в силу того, что структура M является достаточно насыщенной, получаем, что можно найти параметры уже из M, так что формулы $P_1, \ldots, P_n$ уже не определяют полностью тип, совместный с некоторым сечением. Получаем противоречие. Иначе говоря, если множество всех реализаций формулы $f(x) > f(\gamma) \wedge x \in E$ не является конечным объединением выпуклых множеств, то можно найти сечение в E, которое имеет два расширения. Но само E было получено, как одно из n возможных расширений сечений. Следовательно, в новом найденном сечении количество расширений выросло. Поскольку теория является конечно-простеганной, подобное возможно лишь конечное число раз.

Формулы $f(x) = f(\gamma) \wedge x \in E$ и $f(x) < f(\gamma) \wedge x \in E$ рассматриваем аналогично.

А теперь можно провести один в один доказательство о локальной монотонности одноместной функции, как это было проделано для слабо о-минимальных теорий. Действительно, для слабо о-минимальных структур верна теорема о локальной монотонности формульных функций одной переменной [2]. Поскольку функция f определена над M, то получаем, что сужение функции f на множество E будет локально монотонным. Так как выбор α и β был произвольным, то получаем, что сужение функции f на множество B так же является локально монотонным.

Таким образом, теорема доказана.

Работа была поддержана грантом AP05132688 «Относительная стабильность» КН МОН РК.

Список использованной литературы

1 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures.1 // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 295. — P. 565–592.

2 Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. — 2000. — Vol. 352. — P. 5435–5483.

3. Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. — 1998. — Vol. 63. — P. 1511–1528.

4. Bektursynova A., Yergozhina N., Verbovskiy V. Some properties of finitely quilted ordered structures // SDU Khabarshysy, 2016, № 1 (36), P. 103–108.

Форматы 70×100 1/16. 12 б.т.
Таралымы 300 дана

С. Демирел атындағы университеттің хабаршысы
Абылай хан көшесі, 1/1
Алматы облысы, Қаскелең қаласы
040900, Қазақстан
Тел.: +7 727 307 95 60 (іш. 236)
Факс: +7 727 307 95 58
e-mail: info@sdu.edu.kz

Format 70×100 1/16. 12 p's sh.
Edition 300 copies

The editorial office of the scientific journal
Suleyman Demirel University
1/1 Abylai Khan Street, Kaskelen
Kazakhstan, 040900
Tel: +7 727 307 95 60 (ext. 236)
Fax: +7 727 307 95 58
info@sdu.edu.kz